ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 28-29

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 87

Α3. α. Λάθος (σχολικό σελ. 96)

β. Σωστό (σχολικό σελ. 40)

γ. Λάθος (σχολικό σελ. 86-87)

Α4. α. $(\sqrt{\chi})' = \frac{1}{2\sqrt{\chi}}$, $\chi \neq 0$

β. $\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με παράγωγο $f'(x) = 3x^2 - 18x + \alpha$

Από την υπόθεση δίνεται

$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 1^2 - 18 \cdot 1 + \alpha = 0 \Leftrightarrow -15 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 15$

Γ2

Η συνάρτηση έχει τύπο $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 1$ και παράγωγο $f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$

Έχουμε $f(2) = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 15 \cdot 2 + 1 = 8 - 36 + 30 + 1 = 3$

$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 18 \cdot 2 + 15 = 12 - 36 + 15 = -9$

Η εφαπτομένη έχει τη μορφή $y = \lambda \cdot x + \beta$ με $\lambda = f'(2)$.

δηλαδή έχουμε την ευθεία $y = -9x + \beta$

Το σημείο $M(2, f(2)) = M(2,3)$ ανήκει στην ευθεία, επομένως οι συντεταγμένες του την επαληθεύουν.

Αντικαθιστούμε $x = 2$ και $y = f(2) = 3$ και προκύπτει

$3=-9\cdot 2+\beta \Leftrightarrow 3=-18+\beta \Leftrightarrow \beta =21$

Γ3

Η παράγωγος μηδενίζεται αν $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-18x+15=0 \Leftrightarrow 3\left(x^2-6x+5\right)=0$

που έχει λύσεις $x_1=1$ και $x_2=5$

Η μονοτονία της συνάρτησης φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

	$-\infty$		1		5		$+\infty$
f'		+	0	−	0	+	
f		↗		↘		↗	

Επομένως

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,1]$ και $[5,+\infty)$

και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,5]$

Στο $x=1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(1)=1^3-9\cdot 1^2+15\cdot 1+1=8$

Στο $x=5$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(5)=5^3-9\cdot 5^2+15\cdot 5+1=125-225+75+1=-24$

Γ4

Έχουμε διαδοχικά

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-18x+15}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)(x-5)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-5)}{x+1}=\frac{3\cdot(1-5)}{1+1}=-6$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1

Η f έχει νόημα αν ο παρονομαστής δεν είναι μηδέν.

Ο παρονομαστής μηδενίζεται αν $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο $A_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} - \{-1\}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{(x)' \cdot (x+1) - (x+1)' \cdot x}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

Δ2

Είναι $f'(2) = \frac{1}{(2+1)^2} = \frac{1}{9}$ και

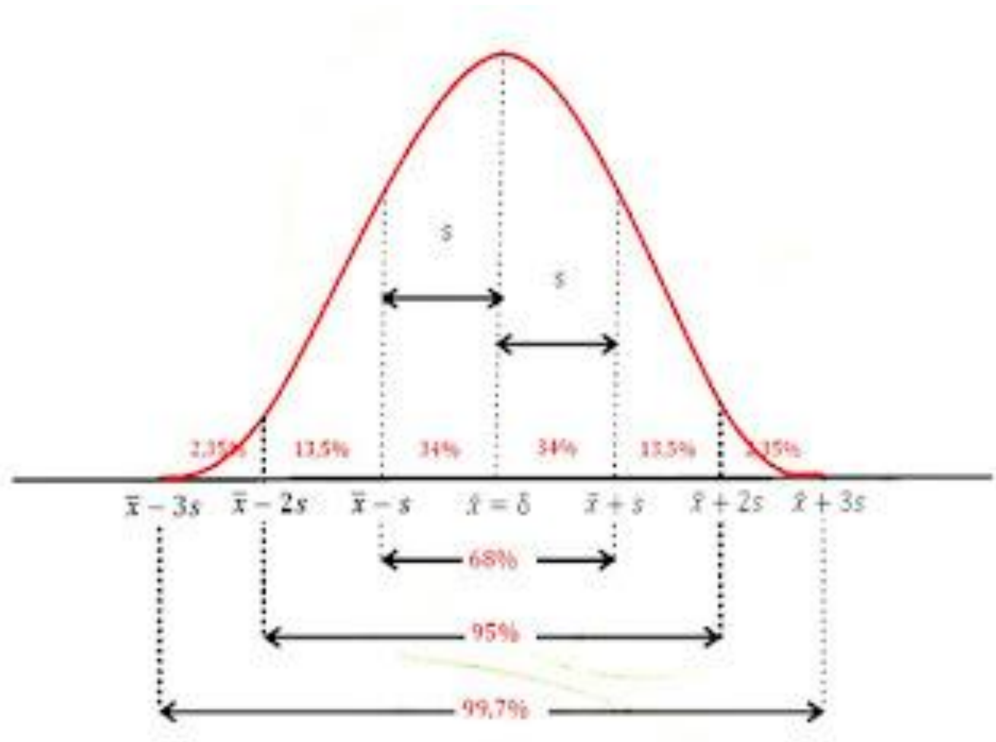
$$f'(1) = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$$

Επομένως

$\bar{x} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9$ και

$$s = \frac{1}{2 \cdot f'(1)} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Δ3



Έχουμε ότι

$\bar{x}-s=9-2=7$
$\bar{x}-2s=9-4=5$
$\bar{x}-3s=9-6=3$

$\bar{x}+s=9+2=11$
$\bar{x}+2s=9+4=13$
$\bar{x}+3s=9+6=15$

Σύμφωνα με τους τύπους της κανονικής κατανομής

από $\bar{x}-s$ μέχρι $\bar{x}+s$ υπάρχει το 68% των μαθητών

Από $\bar{x}-2s$ μέχρι $\bar{x}-s$ υπάρχει το 13,5% των μαθητών.

Συνολικά δηλαδή από 5 μέχρι 11 έχουμε το 81,5% των μαθητών, δηλαδή

$\frac{81,5}{100}\cdot 2000=81,5\cdot 20=1630$ μαθητές

Πάνω από $15=\bar{x}+3s$ υπάρχει το 0,15% των μαθητών, δηλαδή

$\frac{0,15}{100} \cdot 2000 = 0,15 * 20 = 3$ μαθητές

Δ4

$\bar{y}=\bar{x}+3=9+3=12$ λεπτά

$S_y=s_x=2$ λεπτά

Επιμέλεια:

ΝΙΚΗΦΟΡΟΣ ΜΑΝΩΛΗΣ, ΤΣΑΝΤΙΛΑΣ ΣΩΤΗΡΗΣ, ΒΑΝΟΥΣΗΣ ΧΡΙΣΤΟΣ, ΣΚΟΥΛΑΞΕΝΟΣ ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ, ΕΥΓΕΝΙΔΗ ΑΝΝΑ, ΣΤΑΥΡΑΚΑΚΗΣ ΓΙΑΝΝΗΣ, ΚΛΑΔΗΣ ΑΡΓΥΡΗΣ, ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΙΔΗΣ ΚΥΡΙΑΚΟΣ

και τα κέντρα ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ: Πειραιά, Κερατσίνι, Διαδικτυακό, Νέο Ηράκλειο, Μοσχάτο, Άγιος Στέφανος, Ηράκλειο Κρήτης, Παγκράτι Κέντρο